Filtration and the Gorenstein property of the associated Rees algebras(The ring theory of blow-up rings)

西田, 康二

数理解析研究所講究録
第 801 巻 1992 年 14-34

Filtrations and the Gorenstein property of the associated Rees algebras

千葉大自然科学研究科　西田康二 (Koji NISHIDA)

1　序

以下の内容は後藤四郎氏 (明治大学) との共同研究の結果である。

良く知られている様に、d 次元 Noether 局所環 (A, m) の ideal I の Rees 環 $R(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n$の C-M 性及び Gorenstein 性を associated graded ring $G(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ の環論的性質によって特徴付ける研究では、既に多くの仕事がなされ、精密な理論が作られている。この方向での最初の試みは後藤-下田 [8] によるもので、そこでは A が C-M 環で $I = \mathrm{m}$ の場合が扱われ、$R(\mathrm{m})$ が C-M (resp. Gorenstein) であるための必要十分条件は、$G(\mathrm{m})$ が C-M (resp. Gorenstein) で $\mathrm{a}(G(\mathrm{m})) < 0$ (resp. $\mathrm{a}(G(\mathrm{m})) = -2$) であることが、$d \geq 1$ (resp. $d \geq 2$) という仮定の下で示されている。その後、池田 [12] は上記の C-M 性についての結果を、$[H^i_M(G(\mathrm{m}))]_n$ (Mは $G(\mathrm{m})$ の極大斉次 ideal) の vanishing を用いて、一般の Noether 環 (A, m) の場合に拡張し、さらに池田 [13] では、$\mathrm{grade}_A I \geq 2$ のときは、$R(I)$ が Gorenstein であることは、A と $G(I)$ が共に quasi-Gorenstein で $\mathrm{a}(G(I)) = -2$ であることによって特徴付けられることが指摘された。Iが一般の場合の $R(I)$ の C-M 性については、Trung-Ikeda [14] によって研究され、$R(I)$ が C-M である為には、$i \neq d$ かつ $n \neq -1$ のときは $[H^i_M(G(I))]_n = (0)$ でさらに $\mathrm{a}(G(I)) < 0$ となることが、必要十分であることが示された。

一方、ここ数年 A の素 ideal p に対する symbolic Rees algebra $R_s(\mathrm{p}) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{p}^{(n)}$の調査が非常に活発で、Cutkosky, Huneke, Herzog, Schenzel, Ulrich, Vasconcelos 等がこの関係で多くの仕事をしているのであるが、そこで得られている結果や [2], [4], [5], [6] で

の経験を通して見てみると、$R_s(\mathrm{p})$ の C-M 性や Gorenstein 性は、やはりそれに対応する $G_s(\mathrm{p}) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{p}^{(n)}/\mathrm{p}^{(n+1)}$ の環論的性質によって特徴付けられることが推測される。そこでこの報告ではもっと一般に、ideal の族 $F = \{F_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$で (i) $F_n \supseteq F_{n+1}$ for $\forall n \in \mathbf{Z}$, (ii) $F_0 = A$, (iii) $F_mF_n \subseteq F_{m+n}$ for $\forall m, n \in \mathbf{Z}$ となるもの (この様な Fを A の filtration という) から定まる A-代数

$$
\begin{aligned}
R(F) &= \sum_{n\geq 0} F_n t^n \subseteq A[t] \\
R'(F) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} F_n t^n \subseteq A[t, t^{-1}] \\
G(F) &= R'(F)/t^{-1}R'(F)
\end{aligned}
$$

(t は不定元) を考え、普通の Rees 環 $R(I)$ について知られている結果を $R(F)$ に対して拡張することを試みる。

勿論、一般に $R(F)$ が Noether 環であるはずはなく、具体的に filtration Fが与えられた時でもその判定は容易でないことが多いのだが、この報告では次の事実を知っていれば十分である。

命題 (1.1). 次の条件は同値である。

(1) Rは Noether 環である。

(2) $F_{kn} = {F_k}^n$ for $\forall n \in \mathbf{Z}$ となる正整数 kが存在する。

(3) $R(F)^{(k)} \cong R(F_k)$ なる正整数 kが存在する。

(4) $R(F)^{(k)}$が Noether 環になる様な正整数 kが存在する。

さらに、$R(F)$ が Noether 環の場合には、その Krull 次元は次の様になる。

命題 (1.2). $\dim R'(F) = d + 1$, $\dim G(F) = d$ であってさらに

$$
\dim R(F) = \begin{cases} d+1 & F_1 \not\subseteq \bigcap_{\mathrm{p}\in \mathrm{Assh}\, A} \mathrm{p} \text{ のとき} \\ d & \text{その他} \end{cases}
$$

となる。

以下この報告では $F = \{F_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$は A の filtration として、$R = R(F), R' = R'(F), G =$

$G(F)$ と略記し、常にRは Noether 環で $\dim R = d+1$ と仮定する。又、Mは Rの極大斉次 ideal を表すものとする。

2 Rees 環 $R(F)$ の C-M 性

この節では次を示すことを目標とする。

定理 (2.1) 次の条件は同値である。

(1) Rは C-M である。

(2) (i) $i \neq d,\ n \neq -1$ ならば $[H_M^i(G)]_n = (0)$ かつ (ii) $\mathrm{a}(G) < 0$.

このとき $i \neq d,\ n \neq -1$ ならば $[H_M^i(G)]_n \cong H_{\mathbf{m}}^i(A)$ である。

この結果は Viêt[15] によっても独立に示されている。A が C-M のときには定理 (2.1) の statement は次のように簡単なものになる。

系 (2.2). A が C-M であれば、Rが C-M 環になるための必要十分条件は、G が C-M 環で $\mathrm{a}(G) < 0$ となることである。

定理 (2.1) の証明はいくつかの step に分けて行う。

補題 (2.3). $\mathrm{a}(R) = -1$

証明. $J = R_+ = \sum_{n\geq 1} F_n t^n$ とおき次の様な二つの完全列

$$(2.4)\quad 0 \to J \to R \to A \to 0 \qquad \text{と}$$

$$(2.5)\quad 0 \to J(1) \to R \to G \to 0$$

を考える。これらに $H_M^0(\cdot)$ を施して

$$H_{\mathbf{m}}^d(A) \to H_M^{d+1}(J) \to H_M^{d+1}(R) \to 0 \qquad (\text{exact}) \quad \text{と}$$

$$H_M^d(G) \to H_M^{d+1}(J)(1) \to H_M^{d+1}(R) \to 0 \quad (\text{exact})$$

が induce されるが、まず前者より任意の $n \neq -1$ に対して $[H_M^{d+1}(J)]_{n+1} \cong [H_M^{d+1}(R)]_{n+1}$ が得られ、さらに後者より $[H_M^{d+1}(J)]_{n+1} \to [H_M^{d+1}(R)]_n$ なる全射の存在が保証される。

従って $n \neq -1$ ならば $[H_M^{d+1}(R)]_n$は $[H_M^{d+1}(R)]_{n+1}$ の homomorphic imageである。一方 $m >> 0$ ならば $[H_M^{d+1}(R)]_m = (0)$ なので、結局任意の $n \geq 0$ に対して $[H_M^{d+1}(R)]_n = (0)$ でなければならない。さらにもし $[H_M^{d+1}(R)]_{-1} = (0)$ ならば、全ての $n \leq -1$ に対して $[H_M^{d+1}(R)]_n = (0)$ となり、既に示した事と合わせて $H_M^{d+1}(R) = (0)$ であるが、これは $\dim R = d+1$ に反する。∎

命題 (1.1) より $F_{kn} = {F_k}^n$ for $\forall n \in \mathbf{Z}$ なる正整数 kが存在する。以下この kに対して $G' = G(F_k)$ とおき、$R(F_k)$ の極大斉次 ideal を Nで表す。

補題 (2.6). (1) $i \geq 0$とせよ。もし$[H_M^i(G)]_n = (0)$ for any $n \neq -1$ならば$[H_N^i(G')]_n = (0)$ for all $n \neq -1$である。

(2) $\mathrm{a}(G) < 0$ ならば $\mathrm{a}(G') < 0$である。

証明. (1) R'の極大斉次 ideal を M'と書く。完全列 $0 \to R'(1) \xrightarrow{t^{-1}} R' \to G \to 0$ に $H_{M'}^0(\cdot)$ を施して

$$[H_{M'}^i(R')]_{n+1} \xrightarrow{t^{-1}} [H_{M'}^i(R')]_n \to [H_{M'}^i(G)]_n \to [H_{M'}^{i+1}(R')]_{n+1} \xrightarrow{t^{-1}} [H_{M'}^{i+1}(R')]_n \quad \text{(exact)}$$

を得る。$n \neq -1$ とせよ。すると仮定より $[H_{M'}^i(G)]_n = [H_M^i(G)]_n = (0)$ なので

$$[H_{M'}^i(R')]_{n+1} \xrightarrow{t^{-1}} [H_{M'}^i(R')]_n$$

は全射で

$$[H_{M'}^{i+1}(R')]_{n+1} \xrightarrow{t^{-1}} [H_{M'}^{i+1}(R')]_n$$

は単射であることが分かる。従って

$$[H_{M'}^i(R')]_{k(n+1)} \xrightarrow{t^{-k}} [H_{M'}^i(R')]_{kn}$$

は全射で

$$[H_{M'}^{i+1}(R')]_{k(n+1)} \xrightarrow{t^{-k}} [H_{M'}^{i+1}(R')]_{kn}$$

は単射である。ここで $[H^j_{M'}(R')]_{km} \cong [H^j_{N'}(R'^{(k)})]_m$ (cf. [9, THEOREM(3.1.1)]) ($j \geq 0$, $m \in \mathbf{Z}$ で N'は $R'^{(k)}$の極大斉次 ideal) に注意し、$0 \to R'^{(k)}(1) \xrightarrow{t^{-k}} R'^{(k)} \to G \to 0$ に $H^0_{N'}(\cdot)$ を施して得られる完全列

$$[H^i_{N'}(R'^{(k)})]_{n+1} \xrightarrow{t^{-k}} [H^i_{N'}(R'^{(k)})]_n \to [H^i_{N'}(G')]_n \to [H^{i+1}_{N'}(R'^{(k)})]_{n+1} \xrightarrow{t^{-k}} [H^{i+1}_{N'}(R'^{(k)})]_n$$

を考えれば $[H^i_{N'}(G')]_n = (0)$ となることが分かる。従って、一般に $H^i_N(G') = H^i_{N'}(G')$ であるから、所用の vanishing $[H^i_N(G')]_n = (0)$ を得る。

(2) $\mathrm{a}(G) < 0$ なので全ての $n \geq 0$ に対して $H^d_M(G) = (0)$ である。すると (1) の証明と同様にして、$n \geq 0$ ならば $[H^d_N(G')]_n = (0)$ となることが示せる。従って $\mathrm{a}(G') < 0$ である。∎

系 (2.7). $i \neq d$, $n \neq -1$ ならば $[H^i_M(G)]_n = (0)$ で $\mathrm{a}(G) < 0$ とせよ。すると $i \neq d+1$ ならば全ての $n \in \mathbf{Z}$ に対して $[H^i_M(R)]_{kn} = (0)$ である。

証明. (2.6) より $i \neq d$, $n \neq -1$ ならば $[H^i_N(G')]_n = (0)$ で $\mathrm{a}(G') < 0$ なので, [14, Theorem 1.1] より $R(F_k)$ は C-M である。従って $i \neq d+1$ ならば $H^i_N(R(F_k)) = (0)$ であるが、$R(F_k) \cong R^{(k)}$で $[H^i_N(R^{(k)})]_n \cong [H^i_M(R)]_{kn}$ (cf. [9, THEOREM(3.1.1)]) だから、$[H^i_M(R)]_{kn} = (0)$ を得る。∎

定理 (2.1) の証明. $J = \sum_{n \geq 1} F_n t^n$とおき、完全列 (2.4) と (2.5) を用いて証明する。

(1) ⇒ (2) $i < d$とすると仮定より $H^i_M(R) = H^{i+1}_M(R) = (0)$ なので (2.4) より $H^i_{\mathbf{m}}(A) \cong H^{i+1}_M(J)$, (2.5) より $H^i_M(G) \cong H^{i+1}_M(J)(1)$ を得る。従って $H^i_M(G) \cong H^i_{\mathbf{m}}(A)(1)$ となり、(2) の (i) と最後の主張が示された。さらに (2.4) と (2.5) から二つの R-加群の完全列

$$0 \to H^d_{\mathbf{m}}(A) \to H^{d+1}_M(J) \to H^{d+1}_M(R) \qquad \text{と}$$

$$0 \to H^d_M(G) \to H^{d+1}_M(J)(1) \to H^{d+1}_M(R)$$

が induce され、これらと (2.3) より $n \geq 0$ ならば $[H^{d+1}_M(J)]_{n+1} = (0)$ で $[H^d_M(G)]_n \cong [H^{d+1}_M(J)]_{n+1}$ である。よって $[H^d_M(G)]_n = (0)$ for $\forall n \geq 0$ 即ち $\mathrm{a}(G) < 0$ となって (2) の (ii) が示された。

(2) ⇒ (1) $i < d+1$ とする。$H_M^i(R) = (0)$ を示したい。(2.4) と (2.5) より二つの完全列

$$\text{(a)} \quad H_{\mathfrak{m}}^{i-1}(A) \to H_M^i(J) \to H_M^i(R) \to H_M^i(A) \qquad \text{と}$$

$$\text{(b)} \quad H_M^{i-1}(G) \to H_M^i(J)(1) \to H_M^i(R) \to H_M^i(G)$$

を得る。$n \geq 0$ とせよ。まず (a) より $[H_M^i(J)]_{n+1} \cong [H_M^i(R)]_{n+1}$で、一方条件 (2) より $[H_M^{i-1}(G)]_n = [H_M^i(G)]_n = (0)$ だから (b) より $[H_M^i(J)]_{n+1} \cong [H_M^i(R)]_n$である。よって $[H_M^i(R)]_n \cong [H_M^i(R)]_{n+1}$であるが、$[H_M^i(R)]_m = (0)$ for $m >> 0$ なので、これは $[H_M^i(R)]_n = (0)$ を意味する。次に $n < 0$ とせよ。すると (a) より $[H_M^i(J)]_n \cong [H_M^i(R)]_n$ で、(b) より inclusion $[H_M^i(J)]_n \hookrightarrow [H_M^i(R)]_{n-1}$ を得る。よって $[H_M^i(R)]_n \hookrightarrow [H_M^i(R)]_{n-1}$ とでき、これを繰り返して $[H_M^i(R)]_n$を $[H_M^i(R)]_{kn}$ $(k \geq 1)$ の中に埋め込めるが、kを $F_{kn} = {F_k}^n$ for all $n \in \mathbf{Z}$ となる様にとれば、(2.7) より $[H_M^i(R)]_{kn} = (0)$ であるから、結局 $[H_M^i(R)]_n = (0)$ となる。以上で $H_M^i(R) = (0)$ が示された。∎

3 Gorenstein 性

この節では A は Gorenstein 環の像であると仮定し、canonical module K_A, K_G, K_R 等を解析することによって、Rの Gorenstein 性を特徴付けることを目標とする。まず $\mathrm{grade}_A F_1 \geq 2$ の場合の statement を述べると

定理 (3.1). $\mathrm{grade}_A F_1 \geq 2$ の時、次は同値である。

(1) Rは Gorenstein 環である。

(2) (i) $i \neq d, n \neq -1$ ならば $[H_M^i(R)]_n = (0)$. (ii) $K_A \cong A$. (iii) $K_G \cong G(-2)$.

系 (3.2). A が C-M で、$\mathrm{grade}_A F_1 \geq 2$ の時、次は同値である。

(1) Rは Gorenstein 環である。

(2) A と G は共に Gorenstein 環で $\mathrm{a}(G) = -2$

次に $\mathrm{grade}_A F_1 = 1$ の場合の statement を述べる為に、filtration Fについての次の条件を考える。: **条件 (#)** $f \in \mathrm{Hom}_A(F_1, A)$ ならば $\forall n \geq 1$ に対して $f(F_n) \subseteq F_{n-1}$.

命題 (3.3). 次の様な $F = \{F_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$は条件 (#) をみたす。

(1) Iが A の ideal で Sが A の積閉集合の時、$\forall n \geq 1$ に対して $F_n = I^n \cdot S^{-1}A \cap A$ とおく。

(2) $A = \bigoplus_{i\geq 0} A_i$が graded ring で A_1が A-NZD を含む時、$F_n = \bigoplus_{i\geq n} A_i$とおく。

証明 (1) $f \in \mathrm{Hom}_A(F_1, A)$, $n \geq 1$ とする。$\exists s \in S$ s.t. $sF_n \subseteq I^n$. すると $sf(F_n) = f(sF_n) \subseteq f(I^n) = I^{n-1}f(I) \subseteq I^{n-1}$. よって $f(F_n) \subseteq f(F_{n-1})$.

(2) $k \leq -2$ ならば $[\underline{\mathrm{Hom}}_A(F_1, A)]_k = (0)$ を示せば十分。そこで $k \leq -2$ として $\forall f \in [\underline{\mathrm{Hom}}_A(F_1, A)]_k$をとる。仮定より $A_1 \ni \exists a$: A-NZD. すると $f(a) \in A_{k+1} = (0)$. よって $\forall x \in F_1$に対して $af(x) = xf(a) = 0$. a は A-NZD なので $f(x) = 0$. 従って $f = 0$.

∎

さて、$\mathrm{grade}_A F_1 = 1$ の場合の Rの Gorenstein 性の特徴付けは次の様になる。

定理 (3.4). A は (S_2) で $\mathrm{ht}_A F_1 = 1$ とする。もし Fが条件 (#) をみたし、$F_1 \subseteq \mathrm{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ で $\mathrm{ht}_A \mathrm{p} = 1$ ならば A_pが Gorenstein であれば次は同値である。

(1) Rは Gorenstein 環。

(2) (i) $i \neq d$, $n \neq -1$ ならば $[H^i_M(G)]_n = (0)$. (ii) $K_A \cong \mathrm{Hom}_A(F_1, A)$. (iii) $0 \to G(-2) \to K_G \to \mathrm{Ext}^1_A(A/F_1, A) \to 0$ なる graded R-modules の安全列が存在する。

定理 (3.1) と定理 (3.4) の証明はいくつかの step に分けて行う。まず次を示す。

命題 (3.5). Fは条件 (#) をみたすとする。この時 Rが Gorenstein 環であれば次が成り立つ。

(i) $i \neq d$, $n \neq -1$ ならば $[H^i_M(G)]_n = (0)$.

(ii) $K_A \cong \mathrm{Hom}_A(F_1, A)$.

(iii) $0 \to G(-2) \to K_G \to \mathrm{Ext}^1_A(A/F_1, A) \to 0$ なる graded R-modules の完全列が存在する。

(3.5) の証明の為に次を準備する。

補題 (3.6). Rが C-M ならば F_1は A-NZD を含む。

証明. $J = \sum_{n\geq 1} F_n t^n$とおく。$R/J \cong A$ なので $\mathrm{ht}_R J = \dim R - \dim A = 1$. よって $J \not\subseteq P$ for $\forall P \in \mathrm{Ass}\, R$. 従って斉次元 $ct^n \in J$ $(c \in F_n,\ n \geq 1)$ で $ct^n \notin P$ for $\forall P \in \mathrm{Ass}\, R$ となるものが存在する。すると ct^nは R-NZD なので、c は A-NZD となり $c \in F_n \subset F_1$である。∎

命題 (3.5) の証明. (i) は定理 (2.1) の結果に他ならないので、(ii) と (iii) を示す。(2.2) より $K_R \cong R(-1)$ だから $K_A \cong \underline{\mathrm{Ext}}_R^1(A, R(-1))$, $K_G \cong \underline{\mathrm{Ext}}_R^1(G, R(-1))$ となる。よって (2.4)、(2.5) に$\underline{\mathrm{Hom}}_R(\cdot, R(-1))$ を施して完全列

$$\textbf{(2.4)}^* \quad 0 \to R(-1) \to L(-1) \to K_A \to 0$$

$$\textbf{(2.5)}^* \quad 0 \to R(-1) \to L(-2) \to K_G \to 0$$

を得る。但し $L = \underline{\mathrm{Hom}}_R(J, R)$である。まず (2.4)*より $K_A \cong L_{-1}$. ここで $f \in \mathrm{Hom}_A(F_1, A)$ に対して$\varphi(f) \in L_{-1}$を$\varphi(f)(ct^n) = f(c)t^{n-1}$ $(c \in F_n,\ n \geq 1)$ で定め (Fが条件 (#) をみたすのでこれが可能となる)、

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathrm{Hom}_A(F_1, A) & \to & L_{-1} \\ & f & \mapsto & \varphi(f) \end{array}$$

を考えると、明らかにφは injective であるから、φが surjective であることを示せば条件 (ii) を得る。そこで $\forall\sigma \in L_{-1}$をとり、このσに対して $g \in \mathrm{Hom}_A(F_1, A)$ を $g(c) = \sigma(ct) \in R_0 = A$ $(c \in F_1)$ で定める。すると

$$\varphi(g)(xt^n) = \sigma(xt^n) \text{ for } \forall x \in F_n$$

となることが n についての帰納法で示せる。実際 $n = 1$ のときは gの定義より明らかで、$n > 1$ とすると、(3.6) で存在が保証された A-NZD $a \in F_1$を用いて、

$$a \cdot \varphi(g)(xt^n) \;\; = \;\; a \cdot g(x)t^{n-1}$$

$$
\begin{aligned}
&= at \cdot g(x)t^{n-2} \\
&= at \cdot \varphi(g)(xt^{n-1}) \\
&= at \cdot \sigma(xt^{n-1}) \quad \text{(帰納法の仮定)} \\
&= \sigma(axt^n) \\
&= a \cdot \sigma(xt^n)
\end{aligned}
$$

となり、よって$\varphi(g)(xt^n) = \sigma(xt^n)$である。従って$\varphi(g) = \sigma$であるが$\sigma$は任意にとっていたので$\varphi$は surjective である。

次に (iii) の完全列の存在を保証するには (a) $[K_G]_n = (0)$ if $n \le 0$ (b) $[K_G]_1 \cong \mathrm{Ext}_A^1(A/F_1, A)$ (c) $(K_G)_{[2]} \cong G(-2)$ を示せば十分である。但し $(K_G)_{[2]} = \bigoplus_{n\ge 2}[K_G]_n$ とする (一般に、graded R-module $X = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} X_n$ と $k \in \mathbf{Z}$ に対して $X_{[k]} = \bigoplus_{n\ge k} X_n$ とする。$\forall k, \forall l \in \mathbf{Z}$ について自然な同型 $(X(k))_{[l]} \cong (X_{[k+l]})(k)$ が存在することに注意せよ)。まず、Rは C-M なので、(2.1) より $\mathrm{a}(G) < 0$ のはずであるから、(a) はただちに得られる。次に、$0 \to F_1 \to A \to A/F_1 \to 0$ (exact) の A-dual をとって、$0 \to A \to \mathrm{Hom}_A(F_1, A) \to \mathrm{Ext}_A^1(A/F_1, A) \to 0$ (exact) を考え、さらに (2.5)*の degree = 1 の部分をとりだして、可換図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A & \to & \mathrm{Hom}_A(F_1, A) & \to & \mathrm{Ext}_A^1(F_1, A) & \to & 0 \\
 & & \| & & \wr\downarrow_{\varphi} & & & & \\
0 & \to & A & \to & L_{-1} & \to & [K_G]_1 & \to & 0
\end{array}
$$

を作れば、(b) が分かる。最後に (c) は (2.5) と (2.5)*から induce される図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & (R(-1))_{[2]} & \to & (L(-2))_{[2]} & \to & (K_G)_{[2]} & \to & 0 \quad (\text{exact}) \\
 & & \wr\| & & \wr\| & & & & \\
 & & (R_{[1]})(-1) & & (L_{[0]})(-2) & & & & \\
 & & \wr\| & & \wr\| & & & & \\
0 & \to & (J(1))(-2) & \to & R(-2) & \to & G(-2) & \to & 0 \quad (\text{exact})
\end{array}
$$

を考えればただちに示される。∎

今度は Rが Gorenstein になる為の十分条件を述べる。

補題 (3.6). Rは C-M で $[K_R]_1 \cong A$ とする。このとき $\forall n \ge 2$ に対して $[K_G]_n \cong F_{n-2}/F_{n-1}$ ならば Rは Gorenstein である。

証明. 仮定より $\exists\xi \in [K_R]_1$ s.t. $[K_R]_1 = A \cdot \xi$. そこで

$$[K_R]_n = F_{n-1}t^{n-1} \cdot \xi \text{ for } \forall n \geq 1$$

となることを n についての帰納法で示す (これは $K_R \cong R(-1)$ を意味する)。$n = 1$ の時はξの取り方より明らかなので、$n \geq 2$ の場合を考える。$K_A \cong \underline{\mathrm{Ext}}_R^1(A, K_R)$, $K_G \cong \underline{\mathrm{Ext}}_R^1(G, K_R)$ なので、(2.4) と (2.5) に$\underline{\mathrm{Hom}}_R(\cdot, K_R)$ を施して完全列

$$(\mathbf{2.4})^\vee \quad 0 \to K_R \to \underline{\mathrm{Hom}}_R(J, K_R) \to K_A \to 0$$

$$(\mathbf{2.5})^\vee \quad 0 \to K_R \to \underline{\mathrm{Hom}}_R(J, K_R)(-1) \to K_G \to 0$$

を得る。$(2.5)^\vee$より $0 \to [K_R]_n \to [\underline{\mathrm{Hom}}_R(J, K_R)]_{n-1} \to [K_G]_n \to 0$ (exact) であるが、$(2.4)^\vee$より $[K_R]_{n-1} \cong [\underline{\mathrm{Hom}}_R(J, K_R)]_{n-1}$なので、結局

$$0 \to [K_R]_n \to [K_R]_{n-1} \to [K_G]_n \to 0 \quad \text{(exact)}$$

を得る。ここで $\forall i \in \mathbf{Z}$ に対して、$\psi_i : F_{i-1} \to [K_R]_i$を$\psi_i(c) = ct^{i-1} \cdot \xi$ $(c \in F_{i-1})$ で定める。すると

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & [K_R]_n & \to & [K_R]_{n-1} & \to & [K_G]_n & \to & 0 \quad \text{(exact)} \\ & & \uparrow\psi_n & & \uparrow\psi_{n-1} & & & & \\ 0 & \to & F_{n-1} & \to & F_{n-2} & \to & F_{n-2}/F_{n-1} & \to & 0 \quad \text{(exact)} \end{array}$$

が可換になることが確かめられる。$\rho : F_{n-2}/F_{n-1} \to [K_G]_n$ を induce された射とする。帰納法の仮定よりψ_{n-1}は surjective なのでρも surjective であるが、$F_{n-2}/F_{n-1} \cong [K_G]_1$なので$\rho$は isomorphism でなければならない。すると上の可換図式に snake lemma を適用してψ_nは surjective であることが分かる。従って $[K_R]_n = F_{n-1}t^{n-1} \cdot \xi$である。∎

定理 (3.1) の証明. (1) ⇒ (2) $\mathrm{Ext}_A^i(A/F_1, A) = (0)$ if $i \leq 1$ なので、$0 \to F_1 \to A \to A/F_1 \to 0$ (exact) の A-dual をとって、$A \cong \mathrm{Hom}_A(F_1, A)$ を得る。従って (2) の条件が全てみたされることは、(3.5) からただちに分かる。

(2) ⇒ (1) 条件 (ii) と (iii) より、定理 (2.1) を用いて Rが C-M であることを知る。さらに条件 (iii) は $n \geq 2$ ならば $[K_G]_n \cong F_{n-2}/F_{n-1}$ となることも保証しているので、結局 $[K_R]_1 \cong A$ を示しさえすれば (3.6) より Rが Gorenstein であることが分かる。そこで再び

$(2.4)^\vee$と $(2.5)^\vee$を考える。$[K_G]_1 = (0)$ なので $(2.5)^\vee$より $[K_R]_1 \cong [\underline{\mathrm{Hom}}_R(J, K_R)]_0$ で、一方 $[K_R]_0 = (0)$ (cf. (2.2)) なので $(2.4)^\vee$より $[\underline{\mathrm{Hom}}_R(J, K_R)]_0 \cong K_A$となりさらに条件 (ii) より $K_A \cong A$ であるから、$[K_R]_1 \cong A$ を得る。∎

定理 (3.4) の証明. (3.5) より (2) ⇒ (1) のみ示せば十分である。条件 (iii) は $n \le 0$ ならば $[K_G]_n = (0)$ 即ち $\mathrm{a}(G) < 0$ であることを意味するので、条件 (i) と併せて、Rは C-M である。さらに条件 (iii) は $n \ge 2$ ならば $[K_G]_n \cong F_{n-2}/F_{n-1}$ となることも示しているので、(3.6) より $[K_R]_1 \cong A$ を示せば十分である。ここで再び $(2.4)^\vee$と $(2.5)^\vee$を考える。$(2.5)^\vee$より $0 \to [K_R]_1 \to [\underline{\mathrm{Hom}}_R(J, K_R)]_0 \to [K_G]_1 \to 0$ (exact) であるが、$(2.4)^\vee$より $[\underline{\mathrm{Hom}}_R(J, K_R)]_0 \cong K_A$ で条件 (iii) より $[K_G]_1 \cong E := \mathrm{Ext}_A^1(A/F_1, A)$ なので、結局

$$0 \to [K_R]_1 \to K_A \to E \to 0$$

なる完全列を得る。一方で $0 \to F_1 \to A \to A/F_1 \to 0$ (exact) に $\mathrm{Hom}_A(\cdot, A)$ を施して $0 \to A \to \mathrm{Hom}_A(F_1, A) \to E \to 0$ (exact) を得るが、条件 (ii) より $\mathrm{Hom}_A(F_1, A) \cong K_A$なので

$$0 \to A \to K_A \to E \to 0$$

なる完全列の存在が保証される。従って次を示せば $[K_R]_1 \cong A$ を得る。

Claim. $K = K_A$とおく。Zが Kの A-submodule で $K/Z \cong E$ならば

$$Z = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A E} F_1 K_{\mathfrak{p}} \cap K$$

と書ける。即ちその様な A-submodule Zは一意に定まる。

Claim の証明. $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A E$をとる。$F_1 E = (0)$ より $F_1 \subseteq \mathfrak{p}$ なので $\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} > 0$ 従って $\mathrm{depth}_{A_{\mathfrak{p}}} K_{\mathfrak{p}} > 0$ である。そこで $0 \to A_{\mathfrak{p}} \to K_{\mathfrak{p}} \to E_{\mathfrak{p}} \to 0$ (exact) に depth lemma を適用して $\mathrm{depth}\, A_{\mathfrak{p}} = 1$ を得る。A は (S_2) であったから $\mathrm{ht}_A \mathfrak{p} = 1$でなければならない。すると仮定より $A_{\mathfrak{p}}$は Gorenstein である。よって

$$\mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(F_1 A_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}) \;\cong\; K_{\mathfrak{p}}$$

$$\begin{aligned} &\cong K_{(A_{\mathfrak{p}})} \\ &\cong A_{\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

だから $F_1A_{\mathfrak{p}}$は単項 ideal である。ここで $Z = \bigcap_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}_A E} Z(\mathfrak{p})$ は Zの K内での準素分解とする ($Z(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}$-primary component を表す)。上で示した様に $\mathrm{Ass}_A E = \mathrm{Min}_A E$なので $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A E$について $Z(\mathfrak{p}) = \mathrm{Ker}(K \overset{\mathrm{nat}}{\to} K_{\mathfrak{p}}/Z_{\mathfrak{p}})$ であるから、$Z_{\mathfrak{p}} = F_1K_{\mathfrak{p}}$を示せば Claim を得る。$F_1E = (0)$ より $F_1K \subseteq Z$なので、自然な全射$\varepsilon : K/F_1K \to K/Z$を考える。すると $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A E$に対して

$$\begin{array}{ccccc} K_{\mathfrak{p}}/F_1K_{\mathfrak{p}} & \overset{\varepsilon\otimes A_{\mathfrak{p}}}{\to} & K_{\mathfrak{p}}/Z_{\mathfrak{p}} & \to & 0 \quad (\text{exact}) \\ & & \wr\| & & \\ & & E_{\mathfrak{p}} & & \end{array}$$

であるが、一方で $A_{\mathfrak{p}}$が Gorestein で $F_1A_{\mathfrak{p}}$が単項であるから、$K_{\mathfrak{p}}/F_1K_{\mathfrak{p}} \cong A_{\mathfrak{p}}/F_1A_{\mathfrak{p}} \cong E_{\mathfrak{p}}$ となる。従って$\varepsilon \otimes A_{\mathfrak{p}}$は同型写像でなければならず、これは $F_1K_{\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$を意味する。∎

最後に、"$F_1 \subseteq \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ で $\mathrm{ht}_A\, \mathfrak{p} = 1$ ならば $A_{\mathfrak{p}}$は Gorenstein"という定理 (3.4) の仮定は、ある場合には自動的にみたされることを注意しておく。

命題 (3.7). Rは C-M で $\mathrm{Hom}_A(F_1, A) \cong K_A$とし、$F_1 \subseteq \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ で $\mathrm{ht}_A\, \mathfrak{p} = 1$ なるものを考える。このときもし $F_nA_{\mathfrak{p}} = {F_1}^nA_{\mathfrak{p}}$ for $\forall n \in \mathbf{Z}$ ならば $A_{\mathfrak{p}}$は Gorenstein 環である。

証明. $R_{\mathfrak{p}} \cong R(F_1A_{\mathfrak{p}})$ なので [8, COROLLARY(3.5)] より $A_{\mathfrak{p}}$は C-M で $F_1A_{\mathfrak{p}}$は単項 ideal である。従って

$$\begin{aligned} K_{(A_{\mathfrak{p}})} &\cong (K_A)_{\mathfrak{p}} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(F_1A_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}}) \\ &\cong A_{\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

となり $A_{\mathfrak{p}}$が Gorenstein であることを得る。∎

4 $R^\natural$の C-M 性と Gorenstein 性

$R = R(F) = \sum_{m\geq 0} F_m t^m$の filtration $\mathcal{J} = \{J_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$を

$$J_n = \begin{cases} \sum_{m\geq n} F_m t^m & \text{if } n > 0 \\ R & \text{if } n \leq 0 \end{cases}$$

と定め (特に $J = J_1$と書く)、

$$R^\natural := R(\mathcal{J}) = \sum_{n\geq 0} J_n u^n \subseteq R[u]$$

(u は変数) とおく。この節では 2 節と 3 節の結果を用いて、$R^\natural$の環論的性質を調べることを目的とする。

命題 (4.1). $R^\natural$は Noether 環で $\dim R^\natural = d + 2$.

証明. Rは Noether 環と仮定しているので、$f_1 \in F_{m_1}, ..., f_r \in F_{m_r}$ ($m_1, ..., m_r$は正整数) を $R = A[f_1 t^{m_1}, ..., f_r t^{m_r}]$ となる様にとれる。そこで

$$S = A[\{f_k t^{m_k} u^n \mid 1 \leq k \leq r, 0 \leq n \leq m_k\}] \subseteq R^\natural = \sum_{m\geq n} F_m t^m u^n$$

とおく。すると $m \geq n$ なる任意の自然数 m, n について $F_m t^m u^n \subseteq S$ となることが (例えば m についての帰納法で) 容易に分かる。よって $R^\natural = S$となり $R^\natural$は Noether 環である。$\dim R^\natural = d + 2$ であることを示すには、$\exists P \in \mathrm{Assh}\, R$ s.t. $J \not\subseteq P$ を示せば十分である (cf.(1.2)) 。仮定より $\dim R = d + 1$ なので、$\exists \mathrm{p} \in \mathrm{Assh}\, A$ s.t. $F_1 \not\subseteq \mathrm{p}$. すると $J \not\subseteq P := \mathrm{p}A[t] \cap R$で $\mathrm{p} = \mathrm{p}_0 \subset \mathrm{p}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{p}_d = \mathrm{m}$ なる A 内の素 ideal 鎖がとれる。ここで $k > 0$ を $F_1 \not\subseteq \mathrm{p}_{k-1}$かつ $F_1 \subseteq \mathrm{p}_k$ となる様にとる。すると $P = \mathrm{p}_0 A[t] \cap R \subset \cdots \subset \mathrm{p}_{k-1} A[t] \cap R \subset \mathrm{p}_{k-1} R + J \subset \mathrm{p}_k R + J \subset \cdots \subset \mathrm{p}_d R + J$は R内の素 ideal 鎖で長さが $d + 1$ なので、$\dim R/P = d + 1$. 従って $P \in \mathrm{Assh}\, R$である。∎

次の結果は、$R^\natural$の C-M 性や Gorenstein 性を調べるには、実は R自身を調べれば、大体十分であることを意味している。

補題 (4.2). $G(\mathcal{J}) \cong R$ as graded rings.

証明. $\varphi : R \to G(\mathcal{J})$ $(\sum_m a_m t^m \mapsto \overline{\sum_m a_m t^m u^m})$ は同型写像となる。∎

まず $R^\natural$の C-M 性を特徴つけてみる。

定理 (4.3). 次は同値である。

(1) $R^\natural$は C-M である。

(2) $i \neq d+1,\, n \neq -1$ ならば $[H^i_M(R)]_n = (0)$.

このとき F_1は A-NZD を含む。

証明. まず $R^\natural$と $R_M \otimes_R R^\natural$ の C-M 性は同値であることに注意せよ。そこで局所環 R_M内の filtration $\mathcal{J}_M = \{J_n R_M\}_{n\in\mathbf{Z}}$を考える。$R_M \otimes_R R^\natural \cong R(\mathcal{J}_M)$ で $R_M \otimes_R G(\mathcal{J}) \cong G(\mathcal{J}_M)$ なので、(2.1) より $R_M \otimes_R R^\natural$の C-M 性は $R_M \otimes_R G(\mathcal{J})$ の local cohomology の vanishing で特徴付けられる。更に $R \backslash M$の元は $G(\mathcal{J})$ に unit として作用するから $R_M \otimes_R G(\mathcal{J}) \cong G(\mathcal{J})$ となり、(4.2) より $R_M \otimes_R G(\mathcal{J}) \cong R$を得る。従って

$$R^\natural\text{が C-M} \Leftrightarrow i \neq d+1, n \neq -1 \text{ ならば } [H^i_M(R)]_n = (0) \text{ で } \mathrm{a}(R) < 0$$

であるが、(2.2) より $a(R) < 0$ は常に成立しているので、所用の結果を得る。∎

定理 (4.4). $R^\natural$は C-M とせよ。このとき次が成り立つ。

(1) $\forall k \geq 2$ について $R^{(k)}$は C-M である。

(2) Rは (S_2) をみたす。

証明. (1) $k \geq 2$ とせよ。すると $\forall n \in \mathbf{Z}$ について $kn \neq -1$ なので $i \neq d+1$ ならば $[H^i_M(R)]_{kn} = (0)$ である。ここで Nを $R^{(k)}$の極大斉次 ideal とすれば $[H^i_N(R^{(k)})]_n \cong [H^i_M(R)]_{kn}$ ([9, THEOREM(3.1.1)]) となることに注意して $\forall i \neq d+1$ について $H^i_N(R^{(k)}) = (0)$ を得る。従って $R^{(k)}$は C-M である。

(2) いくつかの step に分けて証明する。

Step 1. depth $R_M \geq 2$.

証明. (1) より $R^{(2)}$は C-M だから、(3.6) より F_2は A-NZD a を含む。そこで $0 \to R \xrightarrow{a} R \to R/aR \to 0$ (exact) から induce される local cohomology の長完全列を考えると、$H^0_M(R) = (0)$であることから、$H^0_M(R/aR) \subseteq H^1_M(R)$ を得る。すると $H^0_M(R/aR) \subseteq R/aR$ で更に (4.3) より $H^1_M(R) = [H^1_M(R)]_{-1}$なので $H^0_M(R/aR) = (0)$でなければならない。よって depth $R_M/aR_M \geq 1$ 従って depth $R_M \geq 2$.

Step 2. a は Step 1 で選んだ A-NZD とする。このとき $P \in \mathrm{Ass}_R\, R/aR$ならば $P \cap A \neq \mathbf{m}$ 又は $\mathrm{ht}_R\, P = 1$である。

証明. $P \cap A = \mathbf{m}$ とせよ。もし $J \subseteq P$ならば $P = M$よって depth $R_M = 1$ となって Step 1 に反する。従って $J \not\subseteq P$. すると $x \in F_l$ $(l > 0)$ で $xt^l \notin P$なるものがとれる。一方で $P \in \mathrm{Ass}_R\, R/aR$なので $P = aR :_R yt^k$ $(y \in F_k, k > 0)$ と書ける。ここで必要ならば yt^kを xyt^{k+l}でおきかえることにより、$k \geq 2$ と仮定してよい。すると $R^{(k)}$は C-M で、$P \cap R^{(k)} = aR^{(k)} :_{R^{(k)}} yt^k$より $P \cap R^{(k)} \in \mathrm{Ass}_{R^{(k)}}\, R^{(k)}/aR^{(k)}$なので、$\mathrm{ht}_{R^{(k)}}\, P \cap R^{(k)} = 1$である。$R$は $R^{(k)}$上 integral なので $\mathrm{ht}_R\, P = 1$ を得る。

Step 3. depth $R_Q \geq \min\{2, \mathrm{ht}_R\, Q\}$ for $\forall Q \in \mathrm{Spec}\, R$.

証明. 任意に $Q \in \mathrm{Spec}\, R$をとり $\mathbf{p} = Q \cap A$ とおく。$F_{\mathbf{p}} = \{F_m A_{\mathbf{p}}\}_{m \in \mathbf{Z}}$ (これは $A_{\mathbf{p}}$内の filtration になる) とおくと $R_{\mathbf{p}} \cong R(F_{\mathbf{p}})$, $QR_{\mathbf{p}} \cap A_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}A_{\mathbf{p}}$で ${R_{\mathbf{p}}}^{\natural} \cong R_{\mathbf{p}} \otimes_R R^{\natural}$ は C-M なので最初から $Q \cap A = \mathbf{m}$ の場合を考えれば良い。すると Q は Step 1 でとった R-NZD a を含む。よって $\mathrm{ht}_R\, Q = 1$ の場合は所用の不等式が成り立つので、$\mathrm{ht}_R\, Q \geq 2$ の場合を考える。すると Step 2 より $Q \not\subseteq P$ for $\forall P \in \mathrm{Ass}_R\, R/aR$であるから、$Q$ は R/aR-NZD を含む。従って depth $R_Q \geq 2$ となる。∎

次に $R^{\natural}$の Gorenstein 性を考える。以下常に A は Gorenstein 環の像と仮定する。目標は次を示す事である。

定理 (4.5). 次は同値である。

(1) $R^\natural$は Gorenstein 環である。

(2) 次の条件がみたされる。

(i) $i \neq d+1,\ n \neq -1$ ならば $[H^i_M(R)]_n = (0)$

(ii) $K_R \cong \mathrm{Hom}_R(J, R)$.

証明はいくつかの Step に分けて行なう。

補題 (4.6). $\mathrm{I} = F_1R + J$とおく。もし $\mathrm{ht}_A F_1 > 0$ ならば $\mathrm{ht}_R \mathrm{I} \geq 2$ である。

証明. Pは I を含む Rの素 ideal とする。$\mathrm{p} = P \cap A$ とし A_pの filtration $F_\mathrm{p} = \{F_mA_\mathrm{p}\}_{m\in\mathbf{Z}}$を考える。すると $R_\mathrm{p} \cong R(F_\mathrm{p})$ であるが、$\mathrm{ht}_{A_\mathrm{p}} F_1A_\mathrm{p} > 0$ なので $\dim R_\mathrm{p} \geq 2$ である。実は PR_pは R_pの極大斉次 ideal なので $\mathrm{ht}_R P = \mathrm{ht}_{R_\mathrm{p}} PR_\mathrm{p} = \dim R_\mathrm{p} \geq 2$ となり、従って $\mathrm{ht}_R \mathrm{I} \geq 2$ である。∎

系 (4.7). $P \in \mathrm{Spec}\, R$で $\mathrm{ht}_R P \leq 1$ のものを考える。もし $\mathrm{ht}_A F_1 > 0$ ならば $J_nR_P = J^nR_P$ for $\forall n \in \mathbf{Z}$ である。

証明. $J \not\subseteq P$ならば自明なので $J \subseteq P$のときを考える。$\mathrm{p} = P \cap A$ とおくと (4.6) より $F_1 \not\subseteq \mathrm{p}$ だから $R_\mathrm{p} \cong A_\mathrm{p}[t]$ となる。従って $J_nR_\mathrm{p} = J^nR_\mathrm{p}$ for $\forall n \in \mathbf{Z}$. これを PR_pで局所化して所用の等式を得る。∎

以下 $(\cdot)^* = \underline{\mathrm{Hom}}_R(\cdot, R)$ とする。

補題 (4.8). F_1が A-NZD を含むとすると、$\forall n \leq -2$ について $[J^*]_n = (0)$ で $[J^*]_{-1} \neq (0)$ となる。

証明. $n \leq -2$ とし $\forall \varphi \in [J^*]_n$をとる。仮定より A-NZD $a \in F_1$が存在する。すると $at \in J_1$なので$\varphi(at) \in R_{n+1} = (0)$. よって任意の $c \in F_m$ $(m > 0)$ について $at \cdot \varphi(ct^m) = ct^m \cdot \varphi(at) = 0$ であるが、at は R-NZD なので$\varphi(ct^m) = 0$. これより

$\varphi = 0$. 従って $[J^*]_n = (0)$. 又、

$$\begin{array}{ccc} J & \stackrel{t^{-1}}{\to} & R \\ ct^m & \mapsto & ct^{m-1} \end{array}$$

は $[J^*]_{-1}$の元なので、$[J^*]_{-1} \neq (0)$ である。∎

系 (4.9). $R^\natural$は C-M とする。このとき $K_R \cong J^*$ as the underlying R-modules ならば $K_R \cong J^*(-2)$ as graded R-modules である。

証明. (4.4) より Rは (S_2) なので、$K_R \cong J^*$ as the underlying R-modules ならば $\exists m \in \mathbf{Z}$ s.t. $K_R \cong J^*(m)$ as graded R-modules となることがわかる。(2.2) より $a(R) = -1$ 即ち $\min\{n \mid [K_R]_n \neq (0)\} = 1$ で、一方 (4.3) より F_1は A-NZD を含むので、(4.8) より $\min\{n \mid [J^*(m)]_n \neq (0)\} = -(m+1)$ であるから $1 = -(m+1)$. 従って $m = -2$ を得る。

∎

補題 (4.10). $R^\natural$が C-M ならば graded R-modules として

$$\underline{\mathrm{Ext}}_R^1(R/J, R)(-1) \cong \bigcap_{n \geq 1} (aF_{n-1} :_A F_n).$$

証明. (4.3) より $F_1 \ni \exists a$: A-NZD. すると at は R-NZD. ここで次を示す。

Claim $(atR :_R J)/atR \cong \bigcap_{n \geq 1} (aF_{n-1} :_A F_n)$.

Claim の証明. $n \geq 1$ で $ct^n \in [atR :_R J]_n$とすると、$ct^n \cdot F_1 t \subseteq [atR]_{n+1} = aF_n t^{n+1}$ より $cF_1 \subseteq aF_n$だから、$ct^n \cdot F_1 = cF_1 t^n \subseteq aF_n t^n \subseteq aF_{n-1} t^n = [atR]_n$を得る。よって $ct^n \in atR :_R \mathbf{I}$ $(\mathbf{I} = F_1 R + J)$ である。(4.6) より $\mathrm{ht}_R \mathbf{I} \geq 2$ で (4.4) より Rは (S_2) なので $\mathrm{grade}_R \mathbf{I} \geq 2$ である。これは $atR :_R \mathbf{I} = atR$を意味するから $ct^n \in atR$を得る。従って $n \geq 1$ ならば $[(atR :_R J)/atR]_n = (0)$ となるが、明らかに $[(atR :_R J)/atR]_0 = \bigcap_{n \geq 1} (aF_{n-1} :_A F_n)$ なので Claim が示された。

後は完全列 $0 \to R(-1) \xrightarrow{at} R \to R/atR \to 0$ に$\underline{\mathrm{Hom}}_R(R/J, \cdot)$ を作用させると

$$\underline{\mathrm{Ext}}_R^1(R/J, R) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_R(R/J, R/atR)$$

$$\cong \ (atR :_R J)/atR$$
$$\cong \ \bigcap_{n\geq 1} aF_{n-1} :_A F_n$$

となり、所用の同型を得る。∎

$\mathbf{I}_n = F_nR + J$とおく。すると (4.10) より直ちに次を得る。

系 (4.11). $R^\natural$が C-M ならば

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1_R(R/J, R) \cong \bigcap_{n\geq 1} ((a\mathbf{I}_{n-1} + J)/J :_{R/J} \mathbf{I}_n/J)$$

以下 $\mathcal{G} = G(\mathcal{J}) \cong \bigoplus_{n\geq 0} J_n/J_{n+1}$とおく。

補題 (4.12). $R^\natural$は C-M とする。このとき $K_R \cong J^*$であるならば $0 \to \mathcal{G}(-2) \to K_\mathcal{G} \to \mathrm{Ext}^1_R(R/J, R)(-1) \to 0$ なる graded $R^\natural$-modules の完全列が存在する。

証明. 完全列 $0 \to J \to R \to R/J \to 0$ の R-dual をとって

$$0 \to R \to J^* \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_R(R/J, R) \to 0 \quad \text{(exact)}$$

を得るが,(4.9) より $K_R \cong J^*(-2)$ なので, この完全列から

$$0 \to R(-2) \to K_R \to \underline{\mathrm{Ext}}^1_R(R/J, R)(-2) \to 0 \quad \text{(exact)}$$

が induce される。更に (4.10) より$\underline{\mathrm{Ext}}^1_R(R/J, R)(-1) \cong \bigcap_{n\geq 1} (aF_{n-1} :_A F_n)$ であったから、結局

$$0 \to R(-2) \to K_R \to \bigcap_{n\geq 1} (aF_{n-1} :_A F_n)(-1) \to 0 \quad \text{(exact)}$$

が得られる。ここで (4.2) の同型 $R \cong \mathcal{G}$によって、上の完全列は graded $\mathcal{G}$-modules の category で

$$0 \to \mathcal{G}(-2) \to K_\mathcal{G} \to \bigcap_{n\geq 1} (a\mathbf{I}_{n-1} + J/J :_{R/J} \mathbf{I}_n/J) \to 0 \quad \text{(exact)}$$

に対応することに注意せよ。すると所用の完全列は (6.11) からただちに得られる。∎

定理 (6.5) の証明. 定理 (4.3) の証明と同様に局所環 R_M 内の filtration $\mathcal{J}_M = \{J_n R_M\}_{n\in\mathbf{Z}}$ を考える。このとき $R_M \otimes_R R^\natural \cong R(\mathcal{J}_M)$ で、$R^\natural$ と $R_M \otimes_R R^\natural$ の Gorenstein 性は同値であることに注意せよ。

(1) $\Rightarrow$ (2) 条件 (i) は (4.3) 直ちに従うので (ii) を示す。(4.3) より $F_1 \ni \exists a$: A-NZD. すると at は R-NZD なので (3.3) より filtration $\mathcal{J}$ は条件 (#) をみたす。従って $\mathcal{J}_M$ も条件 (#) をみたすので、(3.5) を用いて、$R(\mathcal{J}_M)$ が Gorenstein であることから $K_{R_M} \cong \mathrm{Hom}_{R_M}(JR_M, R_M)$ を得る。従って $(K_R)_M \cong (J^*)_M$ である。よって $K_R \cong J^*$.

(2) $\Rightarrow$ (1) (4.3) より条件 (i) は $R^\natural$ が C-M であることを意味する。従って (4.12) によって $K_R \cong J^*$ から

$$0 \to G(\mathcal{J}_M)(-2) \to K_{G(\mathcal{J}_M)} \to \mathrm{Ext}^1_{R_M}(R_M/JR_M, R_M)(-1) \to 0 \quad \text{(exact)}$$

が induce される。更に勿論 $K_R \cong J^*$ より $(K_R)_M \cong \mathrm{Hom}_{R_M}(JR_M, R_M)$ であるから、後は (3.7) と (4.7) より $\forall P \in \mathrm{Spec}\, R$ で $J \subsetneq P$ かつ $\mathrm{ht}_R P = 1$ なるものについて R_P が Gorenstein であることに注意すれば、(3.4) を用いて $R(\mathcal{J}_M)$ が Gorenstein であることが分かる。従って $R^\natural$ も Gorenstein 環である。∎

系 (4.13). $R^\natural$ が Gorenstein 環ならば $R^{(2)}$ も Gorenstein 環である。

証明. $R^\natural$ は Gorenstein とせよ。(4.5) より $K_R \cong J^*$ なので (4.12) の証明にある様に

$$0 \to R(-2) \to K_R \to \mathrm{Ext}^1_A(A/F_1, A)(-1) \to 0$$

なる graded R-modules の完全列を得る。$\mathrm{Ext}^1_A(A/F_1, A)(-1)$ は degree $= 1$ のみにしか出現しないので、この完全列より $R(-2)^{(2)} \cong {K_R}^{(2)}$ となる。従って $R^{(2)}(-1) \cong K_{R^{(2)}}$ である。∎

特に F が ideal adic な filtration の場合、即ちある A の ideal I に対して $F_m = I^m$

$(m \in \mathbf{Z})$ であるときは、

$$\begin{aligned} R^\natural &= \sum_{m \geq n} I^m t^m u^n \\ &= \sum_{m \geq n} I^{(m-n)+n} t^{m-n} (tu)^n \\ &= \sum_{n_1, n_2 \geq 0} I^{n_1+n_2} t^{n_1} u^{n_2} \quad (t_1 = t, t_2 = tu) \\ &= A[It_1, It_2] \end{aligned}$$

となるが、この場合は次の様に (4.13) の逆が成り立つ。

定理 (4.14). 次は同値である。

(1) $A[It_1, It_2]$ は Gorenstein 環である。

(2) 次の条件がみたされる。

(i) $i \neq d+1$, $n \neq -1$ ならば $[H_M^i(R)]_n = (0)$.

(ii) $R(I^2)$ は Gorenstein 環である。

参考文献

[1] Bourbaki, N., *Alg'ebre commutative*, Hermann, Paris (1965).

[2] Goto, S., Herrmann, M., Nishida, K. and Villamayor, O., *On the structure of Noetherian symbolic Rees algebras*, manuscripta math., **67** (1990), 197–225.

[3] Goto, S. and Nishida, K., *Filtrations and the Gorenstein property of the associated Rees algebras*, Preprint.

[4] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y., *The Gorensteinness of symbolic Rees algebras for space curves*, J. Math. Soc. Japan, **43** (1991), 465–481.

[5] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y., *The Gorensteinness of of the symbolic blow-ups for certain space monomial curves*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc..

[6] Goto, S., Nishida, K. and Shimoda, Y., *Topics on symbolic Rees algebras for space monomial curves*, to appear in Nagoya Math. J..

[7] Goto, S., Nishida, K. and Watanabe, K., *Non-Cohen-Macaulay symbolic Rees blow-ups for space monomial curves and counterexamples to Cowsik's question*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.. Preprint.

[8] Goto, S. and Shimoda, Y., *On the Rees algebras of Cohen-Macaulay local rings*, Commutative algebra (analytic methods), Lect. Notes in Pure and Appl. Math., **68** (1982), 201 – 231.

[9] Goto, S. and Watanabe, K., *On graded rings rm I*, J. Math. Soc. Japan, **30** (1978), 179-213.

[10] Herzog, J. and Kunz, E., *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay rings*, Lect. Notes in Math., **238**, Springer (1971).

[11] Huneke, C., *Hilbert functions and symbolic powers*, Michigan Math. J., **34** (1987), 293–318.

[12] Ikeda, S., *The Cohen-Macaulayness of the Rees algebras of local rings*, Nagoya Math. J., **89** (1983), 47-63.

[13] Ikeda, S., *On the Gorensteinness of Rees algebras over local rings*, Nagoya Math. J., **102** (1986), 135-154.

[14] Trung, N. V. and Ikeda, S., *When is the Rees algebra Cohen-Macaulay*, Comm. Alg., **17(12)** (1989), 2893–2922.

[15] Viêt, D. Q., *A note on the Cohen-Macaulayness of Rees algebras of filtrations*, Preprint.